ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОСАДКОВ И СТОКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Кабардов А. С.¹, Ахматов А. А.²

¹Кабардов Аслан Сосрукович – студент;

²Ахматов Ахмат Ануарович – студент,

кафедра информатики и технологий программирования,

Институт информатики, электроники и компьютерных технологий

Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик

Аннотации: в данной статье рассматривается прогнозирование и предсказание возможных осадков и стоков, используя математические задачи.

Ключевые слова: осадки, сток, вода.

В этой статье мы кратко рассмотрим применение математики к разного рода крупномасштабным задачам неживой природы и покажем, что широкий круг таких проблем можно успешно решать аналогичными методами.

Начнём с вопросов, которые естественным образом следуют из первой части. Основной результат расчётов погоды — определение полного объёма осадков: количества воды, выпадающей на земную поверхность в конденсированном виде (например, дождь). Считается, что осадки над морем имеют небольшое практическое значение, однако для большей части суши они играют решающую роль как единственный источник пополнения запасов воды для нужд сельского хозяйства, бытовых и промышленности. Осадки особенно важны для запасов воды, хранящихся открыто (водохранилища), которым могут пополняться во время проливных дождей. Что касается колодцев, их нижние части заполнены *до определённого уровня* водой, которая поступает туда из грунтовых вод, содержащихся в почве или пористой породе. Этот уровень, ниже которого подпочвенная вода заполняет все имеющиеся в земле поры, называется *уровнем грунтовых вод*. Забор воды из колодцев приводит к постепенному понижению уровня грунтовых вод в данной местности, а их восполнение возможно лишь за счёт выпадения осадков на поверхность и их просачивания до уровня грунтовых вод [2].

Выше уровня грунтовых вод имеются два слоя земли, которые и в засушливый период могут содержать значительные количества воды. Под действием капиллярных сил вода поднимается вверх (от нескольких сантиметров в крупном гравии до нескольких метров в некоторых осадочных породах) и заполняет поры выше уровня грунтовых вод. Этот слой может перекрываться другим слоем — почвой вблизи поверхности, которая часто связана с корневой системой растений, способной «запасать» воду в порах прилегающей почвы.

Конечно, для сельского хозяйства и лесоводства большое значение имеет то, что корневая система растений может запасать воду таким способом и что растения регулируют испарение (т. е. всасывание воды из почвы, подъем её вверх по стволу и испарение с поверхности листьев) в соответствии с потребностями растения и наличием воды. Но для нормального роста растения существенно, чтобы эта влага восполнялась в почве либо непосредственно осадками, либо с помощью ирригационных систем.

Процессы, при которых запасы воды истощаются, а затем пополняются в результате выпадения осадков, образуют часть гидрологического цикла. В книге Уислера (Wisler) и Брейтера (Brater) «Гидрология» этот цикл представлен в виде круга.

Выпадение осадков из атмосферы показано в верхней левой части круга. Та часть осадков, которая задерживается выше почвы (деревьями и т. д.) и остаётся там, в течение некоторого времени, называется *задержанным запасом*. Кроме того, поверхностное задержание, очевидно, важное для снега, инея и росы, может оказаться значительным и для сильного дождя, большая часть которого может скапливаться в лужах и т. п. В жару прямое испарение влаги из задержанного запаса и поверхностного задержания преждевременно замыкает гидрологический цикл, и воды оказывается недостаточно для пополнения ее запасов.

Просочившаяся в почву вода составляет другую, более полезную долю выпавших осадков. Некоторая её часть проникает вглубь и непосредственно потребляется растениями или же «понапрасну» тратится на испарение; остаток просачивается вниз и образует грунтовые воды. В противоположность этому выпавшая в осадках вода, которая не просочилась в почву и не испарилась непосредственно, образует поверхностный *сток* в ручьи и реки.

Ручьи питаются водой не только за счёт этого, так как ещё и подпочвенные воды попадают в ручьи, находящиеся ниже уровня окружающих грунтовых вод. Тем не менее, поверхностный сток в естественные и искусственные каналы — действительно главный источник наполнения их водой в её наиболее пригодном для использования виде: потоки воды можно по каналам направить в водо-

хранилища или ирригационные системы, или в водохранилища гидроэлектростанций, а также в естественные реки, служащие для промышленного и бытового водоснабжения, навигации и отдыха.

Ежегодно все реки Земли приносят в моря и океаны около 30 000 кубических километров воды, в то время как средние годовые осадки над сушей составляют около 0,75 метра, что соответствует полному объёму воды около 110 000 кубических километров. Разница составляет 80 000 кубических километров; её большая часть непосредственно возвращается в воздух испарением с земли и транспирацией. Таким образом, в воздух *в среднем* возвращается около 3/4 общего количества осадков, хотя это соотношение может сильно меняться вдоль земной поверхности. В умеренном поясе оно испытывает также заметные сезонные колебания, ибо при летних температурах повышается испарение с земли, а бурный рост растительности (под действием солнечного света) увеличивает влаговыделение. Знание этой тенденции используется в прогнозе погоды для вычислений Dr в приземном слое воздуха, но она важна и для подсчёта пополнения водных ресурсов; в Британии, например, зимние дожди дают много больше воды, чем летние.

Теперь сформулируем математическую задачу *осадков и их стока*. Мы хотим предсказать *поверхностный сток* (расход минус приток грунтовых вод) по заданным *эффективным осадкам* (осадки минус просачивание). По определению, *полное* количество воды в обоих случаях одинаково, но важно, как её течение зависит от времени. Фактически следует пользоваться наблюдениями (или предсказаниями) в каждый промежуток из *последовательности равных промежутков времени*, чтобы определить, во-первых, соответствующие эффективные осадки, во-вторых, возникающий в результате этого поверхностный сток за каждый такой промежуток времени и, в-третьих, соответствующий расход. Эта последняя величина как раз и определяет, может ли произойти наводнение.

Вопрос, как лучше перейти от эффективных осадков в каждый промежуток времени к поверхностному стоку за тот же интервал,— математически сложен. В этой статье я расскажу о наиболее известном методе, который даёт неплохую точность.

Этот метод хорош тем, что в нем достаточно точно учитываются предыдущие наблюдения, но он имеет и недостаток — здесь не учитывается важный физический факт: дождевые воды стекают гораздо быстрее, если на поверхности уже много воды. Другими словами, здесь предполагается, что *каждая единица* эффективного дождя (скажем, в миллиметрах, которую, однако, нужно умножить на площадь бассейна, чтобы получить полный объем рассматриваемой воды), выпадающая в каждом промежутке времени, вызывает *одинаковый поверхностный сток*. Пусть u_0 — доля единицы эффективного дождя, которая попадает в поток за тот промежуток времени, за который они выпали (обычно она не велика), а $u_1, u_2, \dots$ — доли, попадающие в поток в первый, второй и т. д. промежутки времени после выпадения этой единицы. Такое разбиение единицы эффективного дождя называют *единичным гидрографом*. Сумма всех u_i , конечно, равна единице.

Предположим, что в первый промежуток времени после начала дождя выпало e_1 единиц эффективностью дождя (это обычно не целое число). Предположим также, что во второй, третий и т. д. промежутки времени выпало $e_2, e_3, \dots$ единиц эффективного дождя. Точно также предположим, что поверхностные стоки в эти интервалы были $j_1, j_2, j_3, \dots$. Тогда, например, j_4 (поверхностный сток за четвёртый промежуток времени) состоял бы из четырёх частей: части $u_0 e_4$ от e_4 единиц, выпавших и этот (четвёртый) промежуток времени; части $u_1 e_3$ от e_3 единиц, выпавших в предыдущий промежуток времени;

Части $u_2 e_2$ от e_2 единиц, выпавших за два промежутка до этого, и части $u_3 e_1$ от e_1 единиц, выпавших три интервала назад (т.е. в первый отрезок времени).

В виде формулы это можно записать так:

$$j_4 = u_0 e_4 + u_1 e_3 + u_2 e_2 + u_3 e_1.$$

Например, во время ливневых дождей в первые четыре промежутка времени (каждый по 10 минут) осадки могут составлять 0,4; 0,8; 1,0; 1,1 миллиметра. Из этого следует, что поверхностный сток за четвёртый интервал равен 1% от 1,1 миллиметра, плюс 5% от 1,0 миллиметра плюс 11% от 0,8 миллиметра, плюс 15% от 0,4 миллиметра, т. е. 0,21 миллиметра. Для бассейна площадью 1000 квадратных километров это означало бы поток в 210 000 кубических метров (тонн) воды за 10 минут, или 350 кубических метров в секунду. [4]

Легко показать, что для любого целого n

$$J_n = u_0 e_n + u_1 e_{n-1} + u_2 e_{n-2} + \dots + u_{n-1} e_1.$$

В правой части формулы сумма индексов при каждом члене равна n , поскольку поверхностный сток в n -й интервал ищется, например, как u_3 -часть эффективных осадков e_{n-3} , выпавших на три интервала раньше n -го.

При каждом n уравнения должны удовлетворяться соответствующими частями $u_0, u_1, u_2, \dots$. В то же время они исключительно удобны для определения этих частей по результатам наблюдений. Сейчас осуществим «наименее плохой» выбор u_i , оценивая его по сумме квадратов отклонений между левой и

правой частями уравнения для различных значений n . Выполнив это один раз для конкретного бассейна, можем считать известными u_i для данного бассейна, а уравнением пользоваться для прогноза.

В частности, можно рассчитать вероятность сильного наводнения. Например, чтобы предсказать «наихудший случай раз в столетие», нужно данные, но особенно сильным ливням экстраполировать при помощи статистической теории больших чисел и рассчитать по ним «наихудший» (т. е. максимально возможный) расход.

Однако у математиков есть широкое поле деятельности для разработки более совершенного способа предсказания поверхностного стока по эффективным осадкам. Нужен метод, сохраняющий положительные качества описанного выше, но в то же время учитывающий, что с ростом объёма воды время её стока уменьшается.

Список литературы

1. *Иванов В. К., Королюк Т. И.* Об оценке погрешностей при решении линейных некорректно поставленных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969. Т. 9. № 1. С. 30–41.
2. *Кучмент Л. С.* Определение функций влияния для линейных моделей стока // Труды Гидрометцентра СССР, 1968. Вып. 25.
3. *Мухин В. М.* Прогнозы гидрографа горной реки в вероятностном виде // Труды Гидрометцентра СССР, 1992. Вып. 324. С. 22–35.
4. *Харшан А. А.* Долгосрочные прогнозы притока воды в водохранилище Красноярской ГЭС // Труды Гидрометцентра СССР, 1978. Вып. 207. С. 3–23.
5. *Христофоров А. В.* Эколого-экономические основы водопользования. М.: Издательство МГУ, 2010. 160 с.