

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ Туткушева Ж.С.

Туткушева Жайлан Салаватовна – PhD докторант,
Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова,
г. Актобе, Республика Казахстан

Аннотация: в статье описан новый алгоритм вычисления глобального минимума $(\bar{x}; f(\bar{x}))$. Применяя новый алгоритм, мы задавались точными значениями $(\bar{x}; \bar{\alpha})$ и проверили, что обещанные точности их вычислений были достигнуты. Предлагаемый алгоритм «не перебирая каждый минимум», находит глобальный минимум с заданной точностью. Применяемый алгоритм основан на квадратурных формулах Соболева с регулярным пограничным слоем.

Ключевые слова: глобальный минимум функции, алгоритм вычисления глобального минимума, соболевские решетчатые кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем.

УДК 519.6

Постановка задачи. Рассматривается в n -мерном прямоугольном параллелепипеде $\bar{Q} = [0;1]^n$ функция $f: \bar{Q} \rightarrow R$, имеющая m производных $f \in C^m(\bar{Q})$. Требуется найти координаты точки, в которой достигается глобальный минимум с точностью до 10^{-6} .

Если функция задана на сетке узлов $\{h * k | k \in Z^n\}$, то можно было бы перебрать значения функции в этих узлах. Но объем вычислений резко возрастает с ростом размерности. Поэтому не можем взять h меньше $\frac{1}{1000}$. Но точность вычисления применяемых интегралов может достигать 10^m , где m гладкость подинтегральных функций - это дает теория соболевских формул с регулярным пограничным слоем.

Заметим, что метод градиентного спуска дает координаты только локальных минимумов.

Мы применяем конструктивный алгоритм, работающий, когда локальных минимумов очень много.

Примеры функции одной переменной разобраны для $m \leq 6$. Нам важно решение одномерных задач, потому что вычисление глобального минимума функции по прямоугольным параллелепипедам можно представить как последовательное решение задач одномерных.

Мы нашли глобальный минимум в примерах функций одной переменной, в которых нашли координаты точек глобальных минимумов точностью 0,001, в которых значения глобальных минимумов определяются с точностью 0,000001.

Сначала рассмотрим задачу для функции одной переменной.

Решаются две задачи. Вычисляется значение глобального минимума $f(\bar{x}) = \bar{\alpha} = \text{glob min}_{x \in \bar{Q}} f(x)$

с заданной точностью ε . Затем вычисляем с нужной точностью значение аргумента $\bar{x}$, при котором функция принимает значение $\bar{\alpha} = f(\bar{x})$. Мы знаем, что функция $f(x)$ достигает глобального минимума при каком-то значении $\bar{x} \in [0;1]$. Опишем алгоритм, который дает значение $\bar{\alpha}$ с заданной точностью.

Для этого вводим вспомогательную функцию, которую назовем определяющей

$$g(\alpha) \equiv \int_0^1 |f(x) - \alpha| - (f(x) - \alpha)^m dx$$

Функция $f(x)$ определена в параллелепипеде. Одно значение α_1 берем меньше значений функции, другое значение α_2 берем больше или равно минимального значения функции. Значения α_1 и α_2 можно задать самим.

Если в определяющую функцию подставим значение α , то определяющая функция примет значение ноль или положительное число, в зависимости от того, пересекает ли прямая $y = \alpha$ график заданной функции. Если $g(\alpha_1) = 0$, то это означает, что прямая $y = \alpha_1$ проходит ниже графика

рассматриваемой функции или касается графика. Если $g(\alpha_2) > 0$, то прямая $y = \alpha_2$ пересекает график или проходит выше графика рассматриваемой функции. Значит, берем за основу $[\alpha_1; \alpha_2]$ промежутков.

Берем $\alpha_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. У нас возникает два варианта. $\alpha'_1 = \alpha_1$ и $\alpha'_2 = \alpha_3$ или $\alpha'_1 = \alpha_3$ и $\alpha'_2 = \alpha_2$. Выбираем тот вариант, для которого $g(\alpha'_1) = 0$, а $g(\alpha'_2) > 0$. Их снова обозначаем $\alpha'_1 = \alpha_1$ и $\alpha'_2 = \alpha_2$.

Выполняя такой алгоритм многократно, мы доходим до промежутка размером меньше чем $\varepsilon \leq 0.000001$, которому принадлежит $\bar{\alpha}$. Пусть для этого требуется k шагов.

Для вычисления глобального минимума на отрезке $[a; b]$ по описанному алгоритму требуется $\frac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, то есть $k \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) / \ln 2$ вычислений определяющей функции. Как видим, число вычислений растёт логарифмически с ростом $\frac{1}{\varepsilon}$. Такой рост количества вычислений значительно меньше, чем количество вычислений в методе перебора.

В наших примерах в среднем на вычисление значения глобального минимума достаточно 15-20 раз вычислить $g(\alpha)$, чтобы достигнуть ответа с нужной точностью.

Теперь приступим к определению аргумента $\bar{X}$, в котором значение глобального минимума достигает $\bar{\alpha}$ с заданной точностью. Вместо деления пополам в одномерном случае, в n мерном случае разделим $\bar{Q}$ на $2n$ равных кубиков (пополам по каждой координате). Хотя бы в одном из кубиков будет $\alpha = \bar{\alpha}$. Этот кубик возьмем за основу и применим к нему описанный выше алгоритм.

Если $\bar{X}$ задан на отрезке $[0; 1]$. Тогда этот отрезок делим пополам. Получим два отрезка $[0; 0.5]$ и $[0.5; 1]$. Хотя бы один из интегралов взятых на этих отрезках будет положительным. Видоизменим формулу определяющей функции $g(\alpha)$, отдельно обозначая интервал, по которым берется интеграл в первоначальном определении

$$g(\alpha)_{[0;0.5]} \equiv \int_0^{0.5} [|f(x) - \alpha| - (f(x) - \alpha)]^m dx$$

или

$$g(\alpha)_{[0.5;1]} \equiv \int_{0.5}^1 [|f(x) - \alpha| - (f(x) - \alpha)]^m dx$$

Берем за основу тот отрезок, на котором $g(\bar{\alpha})$ положительный. Полученный отрезок еще раз делим пополам. И вычисляем $g(\bar{\alpha})$ по новым отрезкам.

После k деления отрезка, по которому определяющая функция положительна, приходим к отрезку длины не больше ε .

Для вычисления аргумента глобального минимума $\bar{X}$ на отрезке $[0; 1]$ нам потребовались $2^{-k} \leq \varepsilon$ или $k \geq \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rceil$ вычислений. Число вычислений растёт логарифмически с ростом $\frac{1}{\varepsilon}$.

Применяя один алгоритм второй раз (определяя $(\bar{X}; \bar{\alpha})$), мы находим маленький отрезок, в котором лежит аргумент глобального минимума. Нужно заметить, если значение глобального минимума находим с точностью ε , то аргумент глобального минимума находится с точностью $O(\sqrt{\varepsilon})$, так как глобальный минимум определяется параболической кривой.

Обратимся к вычислению $g(\alpha)$. Для вычисления определяющей функции с нужной точностью мы применили соболевские решетчатые кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем [1, с. 197] [2, с. 178].

$$\int_{\Omega} f(x) dx = h^n \sum_{k \in Z^n} c_k f(h * k)$$

Также проверяли их точность по формулам Симпсона, имеющим порядок второй точности. Они не распространяются на многомерные интегралы.

Вычисление $g(\alpha)$ с применением соболевских формул даются с точностью h^m . Коэффициенты соболевских формул находятся решением линейной алгебраической системы.

Список литературы

1. *Соболев С.Л. Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы // Новосибирск. ИМ СО РАН, 1996.
2. *Рамазанов М.Д.* Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем // Уфа: ДизайнПолиграфСервис, 2009. 178 с.